РЕШЕНИ ЗАДАЦИ СА РАНИЈЕ ОДРЖАНИХ КЛАСИФИКАЦИОНИХ ИСПИТА

2006.

Задатак 1.

Одредити вредност израза:

а) $\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)$ за $a=4{,}321$ и $b=-0{,}679$;

б) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}$

Решење:

а) Како је за $a \neq 0$ и $b \neq 0$ дати израз идентички једнак изразу $a-b$,

$$\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)=\frac{a^3-b^3}{ab}:\frac{a^2+b^2+ab}{ab}=$$

$$=\frac{(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)}{ab}\cdot\frac{ab}{a^2+ab+b^2}=a-b,$$

то је за дате вредности $a=4{,}321$ и $b=-0{,}679$ вредност израза $a-b=5$.

б)

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{9}-\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{9-7}=\frac{\sqrt{9}-1}{2}=\frac{3-1}{2}=1.$$

Задатак 2.

Решити једначину:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2\,.$$

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x=2 \text{ тј.}$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}=2\,.$$

Увођењем смене $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=t$ добијамо $t+\frac{1}{t}=2$ тј. $t^2-2t+1=0\Leftrightarrow(t-1)^2=0$, одакле је $t=1$, односно $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=1$. Дакле, решење полазне једначине је $x=0$.

Задатак 3.

Доказати идентитет:

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

Решење:

За $\alpha\neq k\pi$ важи:

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cdot(1+\cos\alpha)}=\frac{(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=tg^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

Задатак 4.

Ако се број страница правилног многоугла смањи за један, број његових дијагонала смањи се за осам. Који је то многоугао?

Решење:

Према услову задатка важи:

$$D_n - 8 = D_{n-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n-3)}{2} - 8 = \frac{(n-1) \cdot (n-1-3)}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{n^2 - 3n - 16}{2} = \frac{n^2 - 5n + 4}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2n = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n = 10 .$$

Задатак 5.

Написати једначину праве која на координатним осама одсеца једнаке одсечке и додирује кружницу $x^2 + y^2 = 18$.

Решење:

Једначину праве можемо написати у сегментном облику $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Како је $p = q$ то је $x + y = p \Leftrightarrow y = -x + p$. Права $y = kx + n$ додирује кружницу $x^2 + y^2 = r^2$ ако је $r^2 \cdot \left(1 + k^2\right) = n^2$. Како је $r^2 = 18$, $k = -1$ и $n = p$, то је $36 = p^2 \Leftrightarrow p = \pm 6$, па су једначине праве :

$$t_1 : y = -x + 6 \quad \text{и} \quad t_2 : y = -x - 6 .$$

2007.

Задатак 1.

Вредност израза

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}$$ једнака је:

а) -1; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) $\sqrt{3}+3$; д) $\sqrt{3}+2$.

Решење:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{3+2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)^{-1}=\frac{2\cdot(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}{2\cdot(1+\sqrt{3})}=1$$

Одговор: в)

Задатак 2.

Упрошћен израз

$$\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)$$ има облик:

а) $\frac{a+x}{1+x}$; б) $\frac{a}{x^3+1}$; в) a; г) x; д) 0.

Решење:

$$\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)=\frac{a(x+1)}{x^2-x+1}:\frac{x^2-x+1+3x}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{a\cdot(x+1)}{x^2-x+1}\cdot\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x^2+2x+1}=$$

$$=\frac{a\cdot(x+1)^2\cdot(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)\cdot(x+1)^2}=a \qquad x\neq -1$$

Одговор: в)

Задатак 3.

Решења квадратне једначине $mx^2-(m+2)x+2=0$ задовољавају неједнакост $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\geq 3$ за

а) $m\in(-\infty,0)$; б) $m\in[3,\infty)$; в) $m\in[4,+\infty)$;

г) $m\in[-4,4)$; д) $m\in(0,4)$.

Решење:

На основу Виетових правила је $x_1+x_2=\frac{m+2}{m}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{2}{m}$, $x_1,x_2\neq 0,\ m\neq 0$, па дата неједнакост добија облик:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\geq 3\Leftrightarrow \frac{\dfrac{m+2}{m}}{\dfrac{2}{m}}\geq 3\Leftrightarrow \frac{m+2}{2}\geq 3\Leftrightarrow m+2\geq 6\Leftrightarrow m\geq 4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\in[4,+\infty)$$

Одговор: в)

Задатак 4.

Збир решења једначине $\sqrt[x]{64}-5\cdot\sqrt[x]{2^{x+3}}+16=0$ је:

а) 10; б) 3; в) 4; г) 5; д) 16.

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини

$$2^{\frac{6}{x}}-5\cdot 2\cdot 2^{\frac{3}{x}}+16=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^{\frac{3}{x}}\right)^2-5\cdot 2\cdot 2^{\frac{3}{x}}+16=0$$

Увођењем смене $2^{\frac{3}{x}}=t$, једначина се трансформише у $t^2-10t+16=0$, чија су решења $t_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 16}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}$, $t_1=8$, $t_2=2$. Заменом добијамо $2^{\frac{3}{x}}=8$ или $2^{\frac{3}{x}}=2$, односно $2^{\frac{3}{x}}=2^3$ или $2^{\frac{3}{x}}=2^1$ па је $\frac{3}{x}=3$ или $\frac{3}{x}=1$. Дакле $x_1=1$ и $x_2=3$. Отуда је $x_1+x_2=1+3=4$.

Одговор: в)

Задатак 5.

Производ решења једначине

$\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$ је:

а) 9 ; б) $\frac{1}{3}$; в) 3 ; г) 27 ; д) -2 .

Решење:

Нека је $x > 0$. Дата једначина еквивалентна је једначини $\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{2}{\log_3 x} + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{2}$.

Усвајањем смене $\log_3 x = t$, једначина добија облик $\frac{1}{t} + t = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$ чија су решења $t_1 = 2$ и $t_2 = -1$, па је $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ или $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, односно $x_1 \cdot x_2 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$.

Одговор: в)

Задатак 6.

Израз

$\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{2 - \sin 2x}$ идентички је једнак:

а) $\cos(x - \frac{\pi}{4})$; б) $\frac{\cos x + \sin x}{2}$; в) $\sin(x - \frac{\pi}{4})$; г) 1; д) 0.

Решење:

$$\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{2-\sin 2x}=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x)}{2-2\cdot\sin x\cdot\cos x}=$$
$$=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(1-\sin x\cdot\cos x)}{2(1-\sin x\cdot\cos x)}=$$
$$=\frac{\cos x+\sin x}{2}.$$

Одговор: б)

Задатак 7.

У правоуглом троуглу једна катета је $8\,\text{cm}$ а друга је $2\,\text{cm}$ краћа од хипотенузе. Површина тог троугла је:

а) $40\,\text{cm}^2$; б) $60\,\text{cm}^2$; в) $80\,\text{cm}^2$; г) $48\,\text{cm}^2$; д) $126\,\text{cm}^2$.

Решење:

Ако су a и b катетете, а c хипотенуза правоуглог троугла, онда је $a=8\,\text{cm}, b=c-2$. Применом Питагорине теореме добијамо:

$$c^2=(c-2)^2+8^2 \Leftrightarrow c^2=c^2-4\cdot c+4 \Leftrightarrow 4\cdot c=68 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c=17\ cm.$$

Отуда, $b=17-2=15\,\text{cm}$, па је

$$P=\frac{a\cdot b}{2} \Leftrightarrow P=\frac{8\cdot 15}{2} \Leftrightarrow P=60\ cm^2.$$

Одговор: б)

Задатак 8.

У купу, чији је осни пресек једнакостранични троугао, уписана је лопта запремине $\frac{32}{3}\pi$. Запремина купе је:

а) 20π; б) 30π; в) 25π; г) 24π; д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Нека је s изводница купе, r полупречник основе , H висина купе, а R полупречник лопте. Како је осни пресек једнакостраничан троугао, то је $2 \cdot r = s$ и $H = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{2}$, а $R = \frac{1}{3}H$ тј. $R = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{6}$. Запремина лопте је $V = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi$, па је $\frac{32}{3}\pi = \frac{4}{3}R^3\pi$, одакле је $R = 2$. Тада је $2 = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{6}$ тј. $s = 4\sqrt{3}$, а $r = \frac{s}{2} = 2\sqrt{3}$, $r = 2 \cdot \sqrt{3}$, $H = 6$. Запремина купе је

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot H \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 6 \Leftrightarrow V = 24\pi.$$

Одговор: г)

Задатак 9.

Услов да права $kx - y + 11 = 0$ додирује елипсу $3x^2 + 2y^2 = 11$ је да параметар k има вредности:

а) $k \pm 1$; б) $k \pm 11$; в) $k = 0$; г) $k \pm \sqrt{\frac{63}{2}}$ д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Права $y = kx + n$ додирује елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако је $a^2k^2 + b^2 = n^2$.

Како се дата права може записати у облику $y = kx + 11$ и елипса $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} + \frac{y^2}{\frac{11}{2}} = 1$

то је:

$$\frac{11}{3} \cdot k^2 + \frac{11}{2} = 11^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot k^2 + \frac{1}{2} = 11 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot k^2 = \frac{21}{2} \Leftrightarrow k^2 = \frac{63}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{63}{2}}.$$

Одговор: г)

Задатак 10.

Тринаести члан аритметичког низа -2, -6, -10,... је:

а) 50; б) -50; в) -26; г) 100; д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Како је $a_1 = -2$ и $d = -6 - (-2) = -4$, то је

$$a_{13} = a_1 + 12 \cdot d \Leftrightarrow a_{13} = -2 + 12 \cdot (-4) \Leftrightarrow a_{13} = -50.$$

Одговор: б)

2008.

Задатак 1.

Вредност израза

$$\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$$ je:

а) $2b$; b) $2a$; в) $2a+2b$; г) $2a$ - $2b$.

Решење:

За $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$

$$\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}-\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{ab}}=$$

$$=\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a+b}{ab}}\right)+\left(\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}\right)-\frac{\frac{a-b}{ab}}{\frac{1}{ab}}=$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{2ab}{a+b}-(a-b)=\frac{a^2+b^2+2ab-a^2+b^2}{a+b}=$$

$$=\frac{2ab+2b^2}{a+b}=\frac{2b(a+b)}{a+b}=2b$$

Одговор: а)

Задатак 2.

Производ решења једначине $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$ је:

а) $\sqrt{2}$; б) 1; в) 0; г) 2.

Решење:

Дата једначина може се представити у облику:

$$\left(3^{x^2}\right)^2\cdot\frac{1}{9}-36\cdot 3^{x^2}\cdot\frac{1}{3^3}+3=0 \Leftrightarrow \left(3^{x^2}\right)^2-12\cdot 3^{x^2}+27=0 .$$

Увођењем смене $3^{x^2}=t$, добија се: $t^2-12\cdot t+27=0$ чија су решења $t_1=3$ и $t_2=9$, одакле је $3^{x^2}=3^2$ и $x^2=2,\ x=\pm\sqrt{2}$ или $3^{x^2}=3^1$, $x^2=1,\ x=\pm 1$ па је производ решења $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 = =\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot 1\cdot(-1)=2$.

Одговор: г)

Задатак 3.

Решења једначине $\sin x+\cos 2x=1$ су:

а) $x=k\pi$; б) $x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\quad x_2=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$;

в) $x=\frac{k\pi}{2}$; г) $x_1=k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x_3=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

Решење:

Како је $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, то се заменом добија квадратна једначина:

$2\cdot\sin^2 x-\sin x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x\cdot(2\cdot\sin x-1)=0 \quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \ \vee \ \sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = k\pi\,, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi$$

Одговор: г)

Задатак 4.

Површина ромба чије се дијагонале разликују за $8\,m$ не мења се ако се краћа дијагонала продужи за $3\ m$, а дужа скрати за $4\ m$. Та површина је:

а) $120m^2$; б) $60m^2$; в) $240\ m^2$; г) $100m^2$.

Решење:

Означимо дужине дијагонала са d_1 и d_2. Према условима задатка добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned} & d_1 - d_2 = 8 \\ & \frac{d_1\cdot d_2}{2} = \frac{(d_1-4)\cdot(d_2+3)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_1 = d_2 + 8 \\ & (d_2+8)\cdot d_2 = (d_2+4)\cdot(d_2+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_1 = d_2 + 8 \\ & d_2 = 12 \Rightarrow d_1 = 20 \end{aligned}$$

Тражена површина је $P = \frac{d_1\cdot d_2}{2} = \frac{20\cdot 12}{2} = 120\ m^2$.

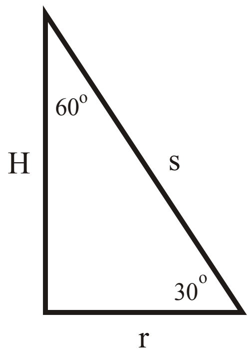
Одговор: а)

Задатак 5.

Угао између изводнице и висине праве кружне купе је 60^0, а разлика њихових дужина је $10\,m$. Запремина купе је:

а) $1000\pi\, m^3$; б) $100\pi\, m^3$; в) $314\ m^3$; г) $300\,\pi m^3$.

Решење:



$$\frac{H}{s} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow s = 2 \cdot H,$$

$$s - H = 10, 2 \cdot H - H = 10\,m, H = 10 \Rightarrow s = 20\,m$$

$$\frac{r}{s} = \sin 60^\circ, r = s \cdot \sin 60^\circ, r = 10\sqrt{3}\ m$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(10\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 10$$

$$V = 1000\pi\ m^3$$

Одговор: а)

2009.

Задатак 1.

Вредност израза

$$\frac{a}{b}\cdot\left(1-\frac{a}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)}\cdot\left(1-\frac{b}{a+b}\right)\ \text{је:}$$

а) 1 ; б) 2 ; в) 0 ; г) -1 .

Решење:

За $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$

$$\frac{a}{b}\cdot\left(1-\frac{a}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{a+b-a}{a+b}\right)+\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a+b-b}{a+b}\right)=$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{a+b}=$$

$$=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=$$

$$=\frac{a+b}{a+b}=1$$

Одговор: а)

Задатак 2.

Решења једначине $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}} 3+\log_3\sqrt{x}+\frac{1}{2}$ су :

а) 3 или 0 ; б) $\frac{1}{3}$ или 9 ; в) 1 или 2 ; г)3 или 6 .

Решење:

Једначина има смисла за $x > 0$ и $x \neq 1$.

Како је $\log_x 3 = \dfrac{1}{\log_3 x}$, $\log_3 \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\log_3 x$ и $\log_{\sqrt{x}} 3 = \dfrac{2}{\log_3 x}$, то је дата једначина еквивалентна са $\dfrac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \dfrac{2}{\log_3 x} + \dfrac{1}{2}\log_3 x + \dfrac{1}{2}$.

Увођењем смене $\log_3 x = t$, добија се:

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{t} + t = \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + 2\cdot t^2 = 4 + t^2 + t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

Одакле је $\boldsymbol{log}_3\, x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ или $\boldsymbol{log}_3\, x = -1 \Leftrightarrow x = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$.

Одговор: б)

Задатак 3.

Ако је $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ и α оштар угао, онда је вредност израза $\cos 2\alpha + (\sin(\pi - \alpha))^2$ једнака:

а) $\dfrac{5}{17}$; б) $\dfrac{3}{2}$; в) $\dfrac{225}{289}$; г) $\dfrac{7}{17}$.

Решење:

Како је $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ то је

$$\cos 2\alpha + (\sin(\pi-\alpha))^2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha =$$

$$= 1-\left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1-\frac{64}{289} = \frac{225}{289}.$$

Одговор: в)

Задатак 4.

У једнакокраком троуглу збир трећине угла при врху и половине једног од углова на основици износи 48^0. Углови тог троугла су:

а) $36^0, 36^0, 108^0$; б) $30^0, 30^0, 120^0$; в) $40^0, 40^0, 100^0$; г) $36^0, 72^0, 72^0$.

Решење:

Нека су α и β углови на основици, а γ угао при врху. Тада је:

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\gamma = 48^\circ$$

$$2\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$-\frac{3}{2}\alpha - \gamma = -144^\circ$$

$$2\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 36^\circ \Rightarrow \alpha = 72^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

Дакле $\alpha = \beta = 72^\circ$, $\gamma = 36^\circ$

Одговор: г)

Задатак 5.

Три броја образују растући аритметички низ.Њихов збир је 15 , а збир њихових квадрата је 147. То су бројеви :

а) -1, 5, 11 ; б) 0, 6, 9 ; в) 1, 6, 8 ; г) 3, 5, 7.

Решење:

Нека су то бројеви $a-d$, a , $a+d$. Тада је:

$$a-d+a+a+d=15$$
$$\underline{(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=147}$$
$$3\cdot a=15 \Rightarrow a=5$$
$$\underline{(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=147}$$
$$a=5$$
$$25-10\cdot d+d^2+25+25+10\cdot d+d^2=147 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d^2=36 \Leftrightarrow d=\pm 6.$$

Како је низ растући, то је $d>0$. Дакле, $d=6$ и тражени бројеви су -1, 5, 11.

<u>Одговор: а)</u>

2010.

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\dfrac{3a^{-x}}{1-a^{-x}}-\dfrac{2a^{-x}}{1+a^{-x}}-\dfrac{a^{x}}{a^{2x}-1}\right):\dfrac{a^{-x}}{a^{x}-a^{-x}}$ је:

а) 1 ; б) 5 ; в) a^{x}; г) $a^{x}-1$.

Решење:

Како је $a^{-x}=\dfrac{1}{a^{x}}$ и $a^{2x}-1=\left(a^{x}-1\right)\left(a^{x}+1\right)$, дати израз добија облик:

$$\left(\frac{\frac{3}{a^{x}}}{1-\frac{1}{a^{x}}}-\frac{\frac{2}{a^{x}}}{1+\frac{1}{a^{x}}}-\frac{a^{x}}{a^{2x}-1}\right):\frac{\frac{1}{a^{x}}}{a^{x}-\frac{1}{a^{x}}}=$$

$$=\left(\frac{3}{a^{x}-1}-\frac{2}{a^{x}+1}-\frac{a^{x}}{a^{2x}-1}\right):\frac{1}{a^{2x}-1}=$$

$$=\frac{3a^{x}+3-2a^{x}+2-a^{x}}{a^{2x}-1}\cdot\left(a^{2x}-1\right)=5.$$

Одговор: б)

Задатак 2.

Решење једначине $\sqrt{x-2}=\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+1}$ је:

а) 3 ; б) 2 ; в) 1 ; г) 0 .

Решење:

Уз услове да је $x-2\geq 0,\quad 4x-3\geq 0,\quad x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$, добија се:

$$\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2=4x-3-2\sqrt{4x^2+x-3}+x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x-3}=2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+x-3=4x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Одговор: а)

Задатак 3.

Вредност израза $\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)$ је:

а) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 1 .

Решење:

Користећи формулу за разлику квадрата и одговарајуће адиционе формуле, добија се:

$$\left(1-\boldsymbol{cos}\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\boldsymbol{cos}\frac{\pi}{8}\right)=1-\boldsymbol{cos}^2\frac{\pi}{8}=\boldsymbol{sin}^2\frac{\pi}{8}=$$
$$=\frac{1-\boldsymbol{cos}\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Одговор: б)

Задатак 4.

Бројеви: $\log 2$, $\log\left(5^x - 1\right)$, $\log\left(5^x + 3\right)$ представљају три узастопна члана аритметичког низа за:

а) 1 ; б) $\log_2 5$; в) $\log_5 2$; г) 2 .

Решење:

Како је код аритметичког низа разлика два суседна члана константна, то је :

$$\log\left(5^x - 1\right) - \log 2 = \log\left(5^x + 3\right) - \log\left(5^x - 1\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log\frac{5^x - 1}{2} = \log\frac{5^x + 3}{5^x - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5^x - 1}{2} = \frac{5^x + 3}{5^x - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(5^x - 1\right)^2 = 2\left(5^x + 3\right)$$

Увођењем смене $5^x = t$, $t > 0$, добија се квадратна једначина $t^2 - 4t - 5 = 0$, чија су решења: $t_1 = 5$, $t_2 = -1$. Дакле, $5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Одговор: а)

Задатак 5.

Обим већег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је 22 cm. Висина призме је за 1 cm краћа од основне ивице. Површина те призме је:

а) $72\sqrt{3}cm^2$; б) $72\pi\ cm^2$; в) $24(2\sqrt{3} + 3)cm^2$; г) $64\ cm^2$.

Решење:

Обележимо основну ивицу призме са a ивисину са H. Већи дијагонални пресек призме је правоугаоник страница $2a$ и a -1, одакле је обим једнак:

$$O = 2(2a + a - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 22 = 2(3a - 1) \Leftrightarrow a = 4cm$$
$$H = a - 1 = 3cm.$$

Како је површина шестостране призме једнака $P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$, то се заменом добијених вредности долази до решења:

$$P = 48\sqrt{3} + 72 = 24\,(2\sqrt{3} + 3)cm^2.$$

Одговор: в)